Matematika pro fyziky I
ZS 2020/21, MFF UK
Sada příkladů 10

Fourierovy řady

(1) Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkci $f(x) = x^4$. Vyšetřete konvergenci této řady a řady derivací.

(2) Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in L^1(-\pi, \pi)$ se anulují, jestliže platí $f(-x) = f(x)$ a $f(x+\pi) = -f(x)$?

(3) Jak prodloužíte funkci $f \in L^1(0, \pi/2)$ na interval $(-\pi, \pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$?

(4) Následující funkce rozložte ve Fourierovu řadu a vyšetřete její konvergenci

a) $\sin^4 x$ na $(0, \pi)$

b) $f(x) = \begin{cases} ax, & x \in (-\pi, 0) \\ bx, & x \in (0, \pi) \end{cases}$

c) $|\sin x|$ na intervalu délky periody

d) $\max(0, x)$ na $(-\pi, \pi)$

e) e^{ax} na $(-1, 1)$

(5) Rozložte do sinové a kosinové řady na $(0, \pi)$ funkci x^2.

(6) Sečtěte následující řady v uvedených intervalech

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ $\quad (0, 2\pi)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ $\quad [0, 2\pi]$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ $\quad (-\pi, \pi)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ $\quad [-\pi, \pi]$

(7) Spočtěte

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Řešení **1.** $\frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4}$,
4.a) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$, **c)** $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, **d)** $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$,
e) $2 \sinh a \left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a \cos \pi nx - \pi n \sin \pi nx}{a^2 + (\pi n)^2} \right)$,
5.a) $2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$, **b)** $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$,
6. a) $-\ln(2 \sin \frac{x}{2})$, **b)** $-\int_0^x \ln(2 \sin \frac{t}{2})\, \mathrm{d}t$, **c)** $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x$, **d)** $-\frac{x}{2}$,
7. a) $\frac{\pi^4}{90}$, **b)** $\frac{\pi^6}{945}$, **c)** $-\frac{\pi^2}{12}$.